**Endomorphismes autoadjoints – Démonstrations**

Propriété : Soient et une base orthonormée de . Notons

Alors

Démonstration : ⍟

Notons

Soit , la colonne de , correspond aux vecteur colonne des coordonnées de dans la base .

Or puisque est une base orthonormée de , Ainsi pour , correspond à la cordonnée du vecteur selon le vecteur , càd

Donc est la coordonnée du vecteur selon le vecteur

Donc , où

Donc

Propriété : Soit

Démonstration : ⍟

Soit .

Donc

En appliquant ceci à on a

ie

Donc car

Propriété : Soit soit un sev de stable par , alors est stable par .

Démonstration : ⍟

Soit montrons que

Soit

Ainsi , d’où

Lemme : Soit autoadjoint, les sous-espaces propres de sont 2 à 2 orthogonaux.

Démonstration : ⍟

Soient avec .

Montrons que et sont orthogonaux.

Soient et

Alors et

Ainsi

Mais comme ,

D’où

Donc

Ainsi

Propriété :

Soit autoadjoint. On a équivalence entre :

1. est positif (ie )

De même, on a équivalence entre :

1. est défini positif (ie )

Démonstration : ⍟ (cas défini positif)

 : Supposons que . Soit (alors )

Et

Alors (car )

Or car , d’où

Ainsi

 : Supposons que . Comme est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de telle que , avec .

Alors

Soit alors tq avec les non tous nuls, ie

tq

Donc

Or est orthonormée, donc

Ainsi

Donc